

10.kl LAHENDUSED JA HINDAMISJUHEND

Eesti koolinoorte LIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA KOOLIVOOR

Tallinnas, 2. detsembril 2005. a.

X klass

1. Lihtsusta avaldis $\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac}$.

1. $\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac} = \dots$

Murru lugejale liidan ja lahutan liikmed $3a^2b$ ja $3ab^2$ (et tekiks summa kuubi valem).

$$\dots = \frac{a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac} = \dots \quad (1)$$

Kirjutan summa kuubi valemi kokku, viimasest kolmest liikmest toon sulgude ette teguri $-3ab$.

$$\dots = \frac{(a+b)^3 + c^3 - 3ab \cdot (a+b+c)}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac} = \dots \quad (2)$$

Liikmed $(a+b)^3 + c^3$ moodustavad omakorda abivalemi.

$$\dots = \frac{(a+b+c) \cdot [(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab \cdot (a+b+c)}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac} = \dots \quad (3)$$

Mõlemast liidetavast toon sulgude ette teguri $a+b+c$.

$$= \frac{(a+b+c) \cdot (a^2 - ab + b^2 - ac - bc + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac} = a + b + c \quad (4)$$

Avaldise lihtsustatud kuju on $a + b + c$.

1. Liikmete $3a^2b$ ja $3ab^2$ liitmine ja lahutamine	3p
Summa kuubi valem	1p
Kuupide summa valem	2p
Lihtsustamise lõpuleviimise eest	1p
	<hr/>
	7p

10.kl LAHENDUSED JA HINDAMISJUHEND

2. Kui raamatu leheküljel iga rida lühendada 3 tähe võrra ja seejärel ridade arvu vähendada 2 võrra, siis tähtede arv leheküljel väheneb 145 võrra. Kui aga rida pikendada 4 tähe võrra ja ridade arvu suurendada 3 võrra, siis tähtede arv leheküljel suureneb 224 võrra? Mitu rida on leheküljel ja mitu tähte on reas?
2. Olgu raamatu leheküljel x rida ning igas reas y tähte. Sellisel juhul on algselt leheküljel $x \cdot y$ tähte. Vastavalt ülesande tingimustele saan võrrandite süsteemi

$$\begin{cases} (x-2) \cdot (y-3) = xy - 145 \\ (x+3) \cdot (y+4) = xy + 224 \end{cases}$$
$$\begin{cases} xy - 3x - 2y + 6 = xy - 145 \\ xy + 4x + 3y + 12 = xy + 224 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -3x - 2y = -151 \\ 4x + 3y = 212 \end{cases}$$

Esimesest võrrandist $y = 75,5 - 1,5x$, mille asendan teise võrrandisse.

$$\begin{aligned} 4x + 3 \cdot (75,5 - 1,5x) &= 212 \\ 4x + 226,5 - 4,5x &= 212 \\ -0,5x &= -14,5 \quad | \cdot (-2) \\ x = 29 &\Rightarrow y = 32 \end{aligned}$$

Kontroll. Algselt on leheküljel $29 \cdot 32 = 928$ tähte.

Kui ridade arvu vähendada 2 võrra ja tähtede arvu reas 3 võrra, siis on leheküljel kokku $27 \cdot 29 = 783$ tähte. Seda on tõesti 145 tähe võrra vähem kui 928. Kui ridade arvu suurendada 3 võrra ja tähtede arvu reas 4 võrra, siis on leheküljel kokku $32 \cdot 36 = 1152$. Seda on tõesti 224 tähe võrra rohkem kui 928.

2. **Leheküljel on 29 rida ja igas reas on 32 tähte.**

Muutujate defineerimine

Õige võrrandite süsteemi moodustamine

Võrrandite süsteemi lahendamine

Vastuse vormistamine

1p

3p

2p

1p

7p

10.kl LAHENDUSED JA HINDAMISJUHEND

3. Leia kõik sellised järjestikuste naturaalarvude nelikud a, b, c ja d , mille korral kehtib seaduspära $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$.

3. Olgu otsitavad järjestikused naturaalarvud $a = n$, $b = n + 1$, $c = n + 2$ ja $d = n + 3$. Sellisel juhul peab kehtima võrrand

$$\begin{aligned}n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 &= (n+3)^3 \\n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 &= n^3 + 9n^2 + 27n + 27 \\2n^3 - 12n - 18 &= 0 \quad |:2 \\n^3 - 6n - 9 &= 0\end{aligned}$$

Liidan ja lahutan avaldisele 18.

$$\begin{aligned}n^3 - 27 - 6n - 18 &= 0 \\(n-3) \cdot (n^2 + 3n + 9) - 6 \cdot (n-3) &= 0 \\(n-3) \cdot (n^2 + 3n + 6) &= 0\end{aligned}$$

Kuna teine tegur reaalsel nullkohta ei oma, siis $n = 3$.

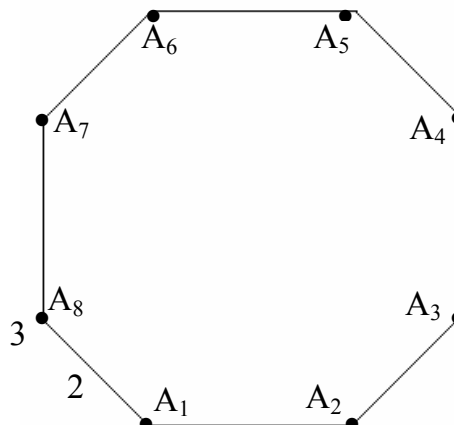
Kontrollin. $3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125 = 216 = 6^3$.

Ainus selline nelik on 3, 4, 5 ja 6.

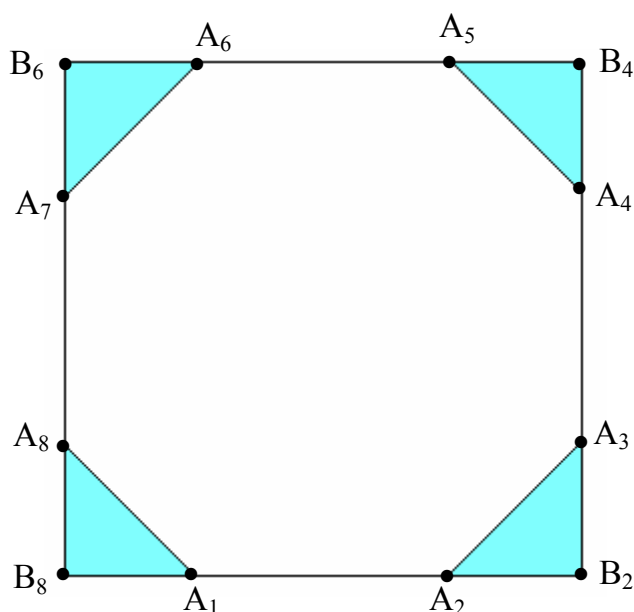
3. Muutuja valik ($n, n + 1, \dots$)	1p
Õige võrrandi moodustamine	1p
Võrrandi lihtsustamine	1p
Kuupvõrrandi lahendamine	3p
Vastuse vormistamine	1p
	<hr/>
	7p

10.kl LAHENDUSED JA HINDAMISJUHEND

4. Leia kaheksanurga $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ pindala, kui tema kõik sisenurgad on võrdsed ning küljed on vaheldumisi pikkustega 3 ja 2.



4. Teen abistava joonise.



Pikendame kaheksanurga külgi nii nagu joonisel näidatud. Kõik värvitud kolmnurgad on täisnurksed, hüpotenuusiga 2.

Seega on väikese kolmnurga kaatet pikkusega $\sqrt{2}$ ning pindala $S_{\Delta} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 1$.

Lõigupikkus $B_8B_2 = B_8A_1 + A_1A_2 + A_2B_2 = \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$. Seega on ruudu

$B_2B_4B_6B_8$ pindala $S_{\text{ruut}} = (3 + 2\sqrt{2})^2 = 9 + 12\sqrt{2} + 8 = 17 + 12\sqrt{2}$.

Kaheksanurga pindala avaldub ruudu pindala ja neljakordse kolmnurga pindala vahena:

$$S = S_{\text{ruut}} - 4 \cdot S_{\Delta} = 17 + 12\sqrt{2} - 4 \cdot 1 = 13 + 12\sqrt{2}$$

Kaheksanurga pindala on $13 + 12\sqrt{2}$.

Abistav joonis	1p
Kaheksanurga täiendamine ruuduni	3p
Väikese kolmnurga pindala leidmine	1p
Lahenduse lõpuleviimine	<u>2p</u>
	7p

Antud ülesandes on kaheksanurka võimalik tükeldada väga erinevalt. Sellisel juhul anda iga õige jaotuse eest 2p, erinevate tükelduste pindalade leidmise eest 2p ning vastuse leidmise eest 2p.

10.ki LAHENDUSED JA HINDAMISJUHEND

5. Tabelis on 4 rida ja 11 veergu. On teada, et 33 ruutu on sinised, ülejäänud aga kollased. Tõesta, et leidub alati kaks ühesuguselt värvitud veergu (st. neis veergudes on sama rea ruudud sama värvi).

5. Vaatame, mitu sinist ruutu tohib olla tabelis, milles on kõik veerud erinevalt värvitud.

Sellises tabelis saab olla ülimalt 1 veerg, milles on sinised kõik 4 ruutu; erinevaid veergusid, kus oleks sinised 3 ruutu, saab olla maksimaalselt 4; erinevaid veergusid, milles on sinised 2 ruutu, saab maksimaalselt olla 6; erinevaid veergusid, milles on 1 sinine ruut, saab olla kõige rohkem 4; lõpuks 1 veerus võivad olla kõik ruudud kollased.

Seega kui me kasutaksime ära kõik lubatud erinevad veerud, siis läheks kasutusse maksimaalselt $1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 32$ sinist ruutu. Tabelit, kus oleks 33 sinist ruutu ja kõik veerud oleksid erinevad järelikult ei eksisteeri.

M. o. t. t.

Idee eest, et on vaja uurida mitu sinist ruutu tohib

olla tabelis, milles on kõik veerud erinevalt värvitud

2p

Sellise tabeli õige analüüsi eest

4p

Vastuse vormistamine

1p

7p

Katsetamise eest olenevalt üldistamise tasemest

1p - 3p